

سلسلة

القيم

www.final-rev.com

في الرياضيات

٢٦

الإحصاء

إعداد:

مستر/محمود حمدان

أستاذ الرياضيات

01153797200

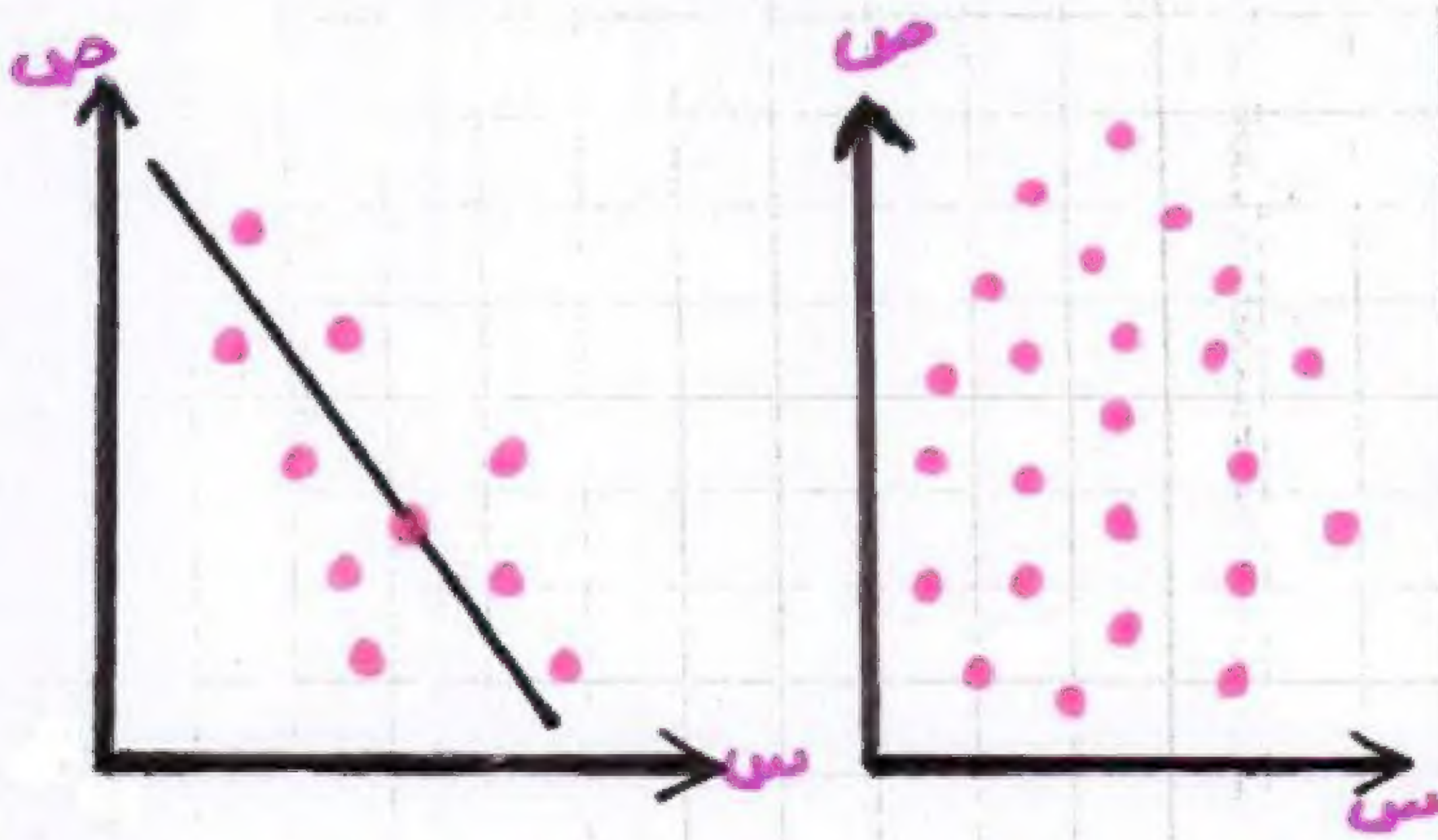
ت:

التفوق عنواننا.. التميز هدفنا

إيفان

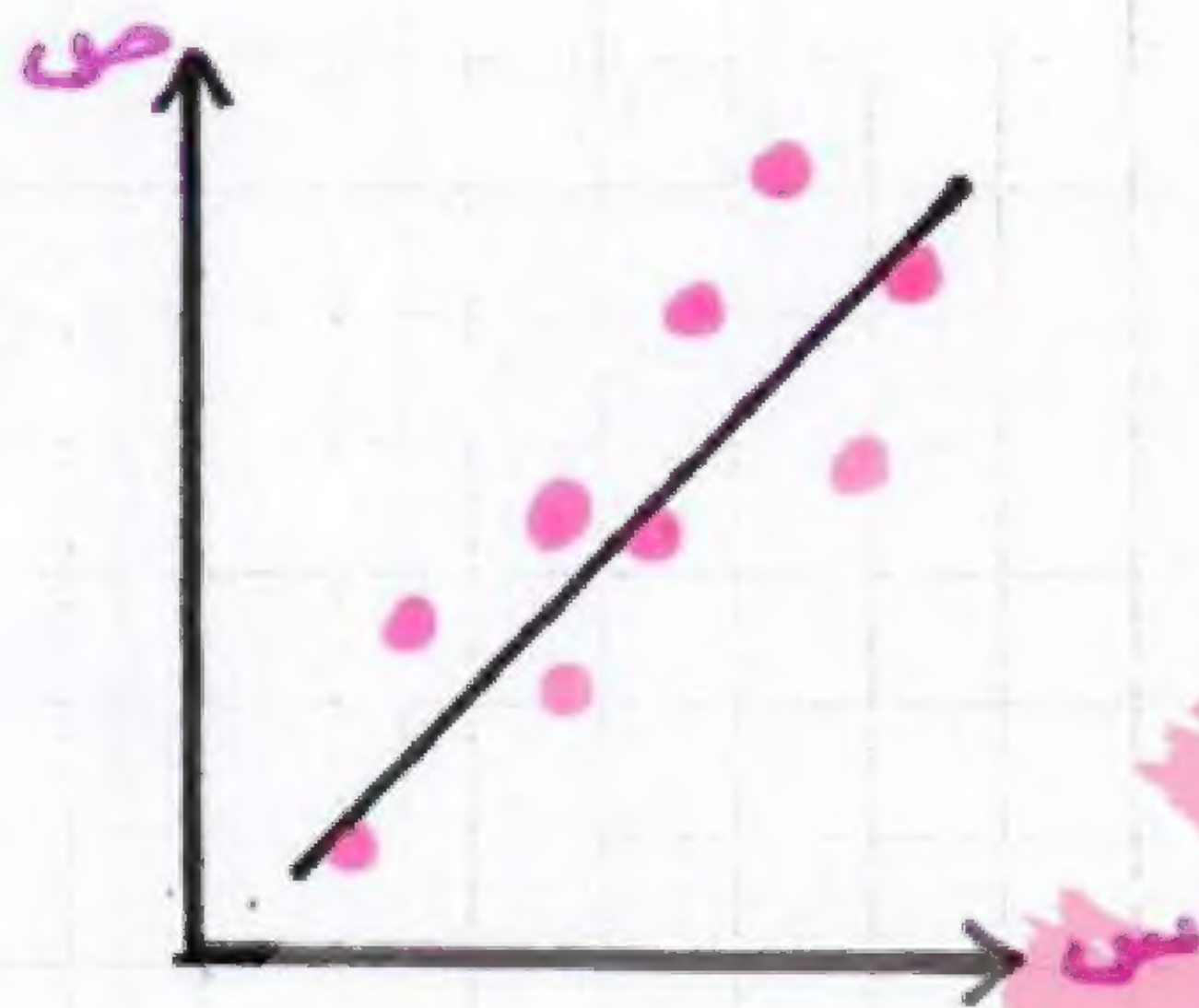


# الإحصاء للتأنيوية العامة



شكل (٢)

شكل (١)



شكل (٣)

شكل (١) لا يوجد ارتباط  
شكل (٢) يوجد ارتباط خطي  
عكسي.  
شكل (٣) يوجد ارتباط خطي  
طردى.

## الارتباط الخطي :-

يعرف الارتباط الخطي البسيط  
بأنه مقياس لدرجة العلاقة  
بين متغيرين .

## ١ الارتباط

هو طريقة إحصائية من خلالها  
يمكن تحديد درجة ونوع العلاقة  
بين متغيرين .

## ٢ شكل الانتشار

هو تمثيل بياني لعدد من الأزواج  
المرتبة (س، ص) لوصف العلاقة  
بين هذين المتغيرين .

وإليك بعض الأشكال للتوضيح  
فإذا رمزنا للظاهرة الأولى بالرمز **س**  
والظاهرة الثانية بالرمز **ص**  
فهناك ارتباط خطي عكسي  
وارتباط خطي طردى .



## معامل الارتباط :

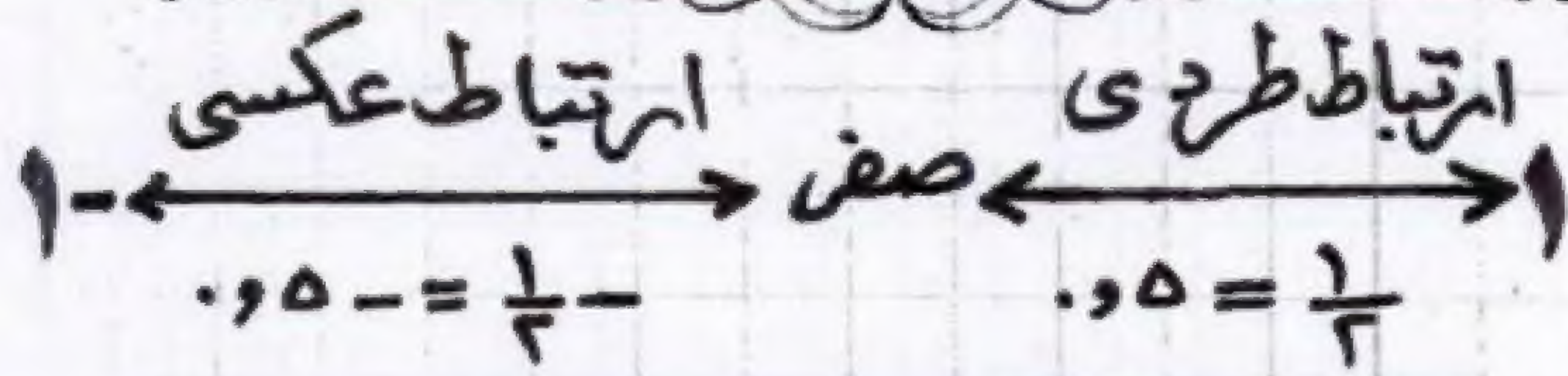
يرمز له بالرمز (r) وهو عبارة عن مقياس كمى نسبى يقيس قوة الارتباط بين متغيرين حيث :

$$r \in [-1, 1] \quad -1 \leq r \leq 1$$

### ملاحظات

- إذا كان معامل الارتباط  $r = 1$  فإنه يقال أنه الارتباط "طردى تام" وإذا كان معامل الارتباط  $r = -1$  فإنه يقال أنه الارتباط "عكسى تام" ونعدم الارتباط عند  $r = 0$ .

- كلما اقتربت قيمة معامل الارتباط من العدد 1 كان الارتباط الطردى بين المتغيرين قوياً . وكلما اقتربت قيمته إلى الصفر كان الارتباط الطردى ضعيفاً وينطبق نفس الكلام على الارتباط العكسى
- توضيح :



ارتباط طردى قوى	ارتباط طردى ضعيف	ارتباط عكسى ضعيف	ارتباط عكسى قوى
↓	↓	↓	↓
طردى تام	عدم ارتباط	عدم ارتباط	عكسى تام

### 1) آخر :

معامل الارتباط الأقوى فيما يلى هو ...

- 0.9    - 0.6    - 0.5    - 0.4    - 0.3    - 0.2    - 0.1

الحل : 0.9

## معامل ارتباط بيرسون

إذا رمزنا لمعامل ارتباط بالرمز (r) فإنه معامل ارتباط بيرسون يعطى من العلاقة

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

حيث

$\bar{x}$  : رمز التجميع وتقرأ مجموع

$n$  : عدد المفردات



## مثال

الجدول التالي يبين الدرجات التي حصل عليها. اطلاب في مادتي الرياضيات والتاريخ:

الرياضيات	س	٧٥	٨٠	٩٣	٦٥	٨٧	٧١	٩٨	٦٩	٨٤	٧٨
التاريخ	ص	٨٢	٧٨	٨٦	٧٢	٩١	٨٠	٩٥	٧٣	٨٩	٧٤

والمطلوب حساب: معامل ارتباط بيرسون وتحديد نوع الارتباط؟

الحل

نكون جبروك كالتالي:

س	ص	س <sup>٢</sup>	ص <sup>٢</sup>	س × ص
٧٥	٨٢	٥٦٢٥	٦٧٢٤	٦١٥٠
٨٠	٧٨	٦٤٠٠	٦٠٨٤	٦٢٤٠
٩٣	٨٦	٨٦٤٩	٧٣٩٦	٧٩٩٨
٦٥	٧٢	٤٢٢٥	٥١٨٤	٤٦٨٠
٨٧	٩١	٧٥٦٩	٨٢٨١	٧٩١٧
٧١	٨٠	٥٠٤١	٦٤٠٠	٥٦٨٠
٩٨	٩٥	٩٦٠٤	٩٠٢٥	٩٣١٠
٦٩	٧٣	٤٧٦١	٥٣٢٩	٥٠٣٧
٨٤	٨٩	٧٠٥٦	٧٩٢١	٧٤٧٦
٧٨	٧٤	٦٠٨٤	٥٤٧٦	٥٧٧٢
Σ س	Σ ص	Σ س <sup>٢</sup>	Σ ص <sup>٢</sup>	Σ س × ص
٨٠٠ =	٨٢٠ =	٦٥٠١٤ =	٦٧٨٢٠ =	٦٦٢٦٠ =

## مثال

من بيانات الجدول التالي:

س	٢٠	٢٣	٢٤	٢٥	٢٨	٣٠
ص	٣٥	٣١	٣٠	٢٧	٢٩	٢٨

احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س، ص ثم حدد نوعه؟

س	ص	س <sup>٢</sup>	ص <sup>٢</sup>	س × ص
٢٠	٣٥	٤٠٠	١٢٢٥	٧٠٠
٢٣	٣١	٥٢٩	٩٦١	٧١٣
٢٤	٣٠	٥٧٦	٩٠٠	٧٢٠
٢٥	٢٧	٦٢٥	٧٢٩	٦٧٥
٢٨	٢٩	٧٨٤	٨٤١	٨١٢
٣٠	٢٨	٩٠٠	٧٨٤	٨٤٠
Σ س	Σ ص	Σ س <sup>٢</sup>	Σ ص <sup>٢</sup>	Σ س × ص
١٥٠ =	١٨٠ =	٣٨١٤ =	٥٤٤٠ =	٤٤٦٠ =



### سؤال

أوجد ارتباط بيرسون بين س، ص  
ثم حدد نوعه:

$$\begin{aligned} & \text{كس} = 92, \text{ كص} = 36 \\ & \text{كس ص} = 372, \text{ كس}^2 = 1100, \text{ كص}^2 = 1296 \\ & \text{كص ص} = 204, \text{ كس} = 8, \text{ كص} = 9 \end{aligned}$$

### الحل

$$\begin{aligned} & r = \frac{n \text{ كس ص} - (\text{كس} \times \text{كص})}{\sqrt{n \text{ كس}^2 - (\text{كس})^2} \times \sqrt{n \text{ كص}^2 - (\text{كص})^2}} \\ & = \frac{(36 \times 92) - 372 \times 8}{\sqrt{(92)^2 - 1100} \times \sqrt{(36)^2 - 1296}} \\ & = 1 \end{aligned}$$

∴ الارتباط عكسي تام

### تدريب

أوجد معامل ارتباط بيرسون بين س، ص  
ثم حدد نوع الارتباط:

$$\begin{aligned} & \text{كس} = 13, \text{ كص} = 24 \\ & \text{كس ص} = 135, \text{ كس}^2 = 500, \text{ كص}^2 = 900 \\ & \text{كص ص} = 9, \text{ كس} = 7 \end{aligned}$$

$$r = \frac{n \text{ كس ص} - (\text{كس} \times \text{كص})}{\sqrt{n \text{ كس}^2 - (\text{كس})^2} \times \sqrt{n \text{ كص}^2 - (\text{كص})^2}}$$

$$r = \frac{(180 \times 150) - 4470 \times 6}{\sqrt{(180)^2 - 544 \times 6} \times \sqrt{(150)^2 - 3814 \times 6}}$$

$$r \approx -0.793$$

∴ الارتباط عكسي قوي.

### سؤال

أوجد معامل ارتباط  
بيرسون بين المتغيرين س، ص وحدد  
نوعه إذا كان:

$$\begin{aligned} & \text{كس} = 78, \text{ كص} = 36 \\ & \text{كس ص} = 348, \text{ كس}^2 = 720, \text{ كص}^2 = 1296 \\ & \text{كص ص} = 204, \text{ كس} = 8, \text{ كص} = 9 \end{aligned}$$

### الحل

$$r = \frac{n \text{ كس ص} - (\text{كس} \times \text{كص})}{\sqrt{n \text{ كس}^2 - (\text{كس})^2} \times \sqrt{n \text{ كص}^2 - (\text{كص})^2}}$$

$$= \frac{(36 \times 78) - 348 \times 8}{\sqrt{(36)^2 - 1296} \times \sqrt{(78)^2 - 720}}$$

∴ الارتباط طردي تام



## ٢) معامل ارتباط سبيرمان (الرتب)

يُستخدم في العلاقة:

$$r_s = \frac{\sum (R_1 - \bar{R}_1)(R_2 - \bar{R}_2)}{n(n-1)}$$

حيث:  $R_1$ : هي الرتبة بين رتب المتغيرين  $X$  و  $Y$   
 $R_2$ : عدد قيم كل من المتغيرين.

**ملاحظة:**

معامل ارتباط سبيرمان يمكن حسابه سواء كانت الكميات كمية أو وصفية.  
 بينما معامل ارتباط بيرسون لا يمكن حسابه إلا على المتغيرات الكمية فقط.  
 يتميز معامل سبيرمان للارتباط الرتب بسهولة حتى لو كانت البيانات غير مرتبة. يؤخذ على معامل سبيرمان إهماله لفروق الأعداد عند حساب الرتب وبالتالي فهو أقل دقة.

**مثال:**

قام إحصائي بدراسة العلاقة بين تقريران صادرين دراستين لعدد ٧ طلاب وحصل النتائج كالتالي:

م	ضعيف	مقبول	ضعيف	جيد	ضعيف	ممتاز	جيد جداً
م	ضعيف	مقبول	جيد	مقبول	ضعيف	جيد جداً	مقبول

أوجد معامل ارتباط الرتب لسيرمان وحدد نوعه؟



خطوات الحل:

١ ترتيب تقديرات المادتين تصاعدياً:

ونلاحظ في المادة الأولى أنه الحالة (ضعيف) تكررت ٣ مرات وشغلت الأماكن ٣، ٢، ١ في الجدول

فنحسب رتبة كل منها  $= \frac{3+2+1}{3} = 2$  وهو الوسط الحسابي

للأعداد ٣، ٢، ١ وبالمثل في المادة الثانية نلاحظ الحالة (ضعيف) تكررت مرتين وشغلت الأماكن ٢، ١ لذلك رتبة كل منها  $= \frac{2+1}{2} = 1.5$

كذلك المستوى (مقبول) تكررت ثلاث مرات وشغلت الأماكن

٥، ٤، ٣ فنحسب رتبة كل منها  $= \frac{5+4+3}{3} = 4$

٢ تكون الجدول:

س	ص	رتبة ص	رتبة س	ف	ف
ضعيف	ضعيف	٢	١.٥	٠.٥	٠.٢٥
مقبول	مقبول	٤	٤	صفر	صفر
ضعيف	جيد	٢	٦	٤	١٦
جيد	مقبول	٥	٤	١	١
ضعيف	ضعيف	٢	١.٥	٠.٥	٠.٢٥
ممتاز	جيد جداً	٧	٧	صفر	صفر
جيد جداً	مقبول	٦	٤	٢	٤

كف = ٢١.٥

$$r = 1 - \frac{6 \times 3 \times 7}{(1-7)(1-21)}$$

$$r = 1 - \frac{21.5 \times 7}{(1-7)(1-21)} \approx 0.7171 \text{، والارتباط طردي قوى}$$





**سؤال ١:** احسب معامل الارتباط الرتبى لمبيانين  
بين س، ص وذلك من خلال الجدول التالي :-

س	٤	٧	٨	٥	٨	١٢
ص	٧	٦	٦	٤	٦	١٠

**الحل** نتبع خطوات الحل السابق ونكون الجدول :

س	ص	رتبه ص	رتبه س	ف	ف <sup>٢</sup>
٤	٧	٦	٢	٤	١٦
٧	٦	٤	٤	٠	٠
٨	٦	٢,٥	٤	١,٥	٢,٢٥
٥	٤	٥	٦	١	١
٨	٦	٢,٥	٤	١,٥	٢,٢٥
١٢	١٠	١	١	٠	٠
Σ ف <sup>٢</sup> = ٢١,٥					

$\therefore r = 1 - \frac{\sum F^2}{n(n-1)}$   
 $\therefore r = 1 - \frac{21,5 \times 6}{(12-1)6}$   
 $\approx 0,3857$  و  
 وهو ارتباط  
 طردي ضعيف

**سؤال ٢:**

احسب معامل ارتباط بيرمان

بين س، ص وحدد نوعه ؟

س	ص	رتبه س	رتبه ص	ف	ف <sup>٢</sup>
١٠	٥	١	٦	٥	٢٥
٧	٨	٣,٥	٤	٠,٥	٠,٢٥
٨	٧	٢	٥	٣	٩
٧	٩	٣,٥	٢,٥	١	١
٦	٩	٥	٢,٥	٢,٥	٦,٢٥
٤	١٠	٦	١	٥	٢٥

Σ ف<sup>٢</sup> = ٦٦,٥

س	١٠	٧	٨	٧	٤
ص	٥	٨	٧	٩	١٠

**الحل:**

$$\therefore r = 1 - \frac{\sum F^2}{n(n-1)}$$

$\approx -0,9$  و عكسي قوى





## سؤال ١ : من بيانات الجدول التالي

احسب معامل ارتباط بيرمان  
محدداً نوعه ؟

س	جيد جداً	ممتاز	جيد	جيد جداً	مقبول
ص	ممتاز	جيد جداً	مقبول	جيد جداً	مقبول

## الحل :

من الجدول  $n = 5$   
 $K = 5$

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 5}{5(5^2 - 1)} = 0.75$$

∴ طردى قوى

س	ص	ر(س)	ر(ص)	ف	ق
جيد جداً	ممتاز	٢.٥	١	١.٥	٢.٥
ممتاز	جيد جداً	١	٢.٥	١.٥	٢.٥
جيد	مقبول	٤	٤.٥	٠.٥	٠.٥
جيد جداً	جيد جداً	٢.٥	٢.٥	٠	٠
مقبول	مقبول	٥	٤.٥	٠.٥	٠.٥
٣	٥	٥	٤.٥	٠.٥	٠.٥
٣	٥	٥	٤.٥	٠.٥	٠.٥

٣ = ٥

## ملاحظة :

١ للتأكد من  $r_s = 0.75$

٢ معامل بيرمان أدنى من معامل بيرمان لأنه يعتمد على القيم.

## تدريب

احسب معامل

ارتباط بين س، ص

بـ جونز محدداً نوعه ؟

س	١٠	٧	٨	٧	٦	٤
ص	٥	٨	٧	٩	٩	١٠



# الإخدار

هو أسلوب إحصائي يمكن بواسطته تقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية قيمة المتغير الآخر.

**أنواع الإخدار:** ① إخدار خطي بسيط

② إخدار متعدد

③ إخدار غير خطي

وهو يقتصر دائماً على الإخدار الخطي البسيط

## معادلة خط الإخدار

$$\text{ص} = \text{ب} + \text{ا}$$

حيث  $\text{ا}$ : الجزء المقطوع من محور الصادات  
 $\text{ب}$ : معامل إخدار ص على س وهي تعبر عن ميل خط الإخدار على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

والطريقة الأفضل شيوعاً لإيجاد أفضل قيم  $\text{ا}$ ،  $\text{ب}$  تسمى طريقة المربعات الصغرى.

## طريقة المربعات الصغرى:

$$\text{ص} = \text{ب} + \text{ا}$$

حيث  $\text{ص}$  تقرأ ص هات

تسمى بمعامل إخدار ص على س وهي تعبر عن ميل خط الإخدار



حيث :

$$p = \frac{K_v - B K_s}{n} , \quad B = \frac{N K_s - K_s \times K_v}{N K_s - (K_s)^2}$$

مقدار الخطأ = القيمة الجدولية - القيمة الانحدارية

من الجدول  $\downarrow$  من معادلة الانحدار  $\downarrow$

مثال : من الجدول الآتي :

س	١٠	١٢	١٥	١٢	١٤	٨
ص	٦	٨	٦	٦	٩	٥

أوجد : ١) معادلة خط الانحدار ٢) تنبأ بقيمة ص عندما س = ٧  
٣) أوجد قيمة الخطأ عندما س = ٨ ؟

الحل :

س	ص	س	ص	س	ص
١٠	٦	١٠٠	٣٦	٦٠	٦٠
١٢	٨	١٤٤	٦٤	٩٦	٩٦
١٥	٦	٢٢٥	٣٦	٩٠	٩٠
١٢	٦	١٤٤	٣٦	٧٢	٧٢
١٤	٩	١٩٦	٨١	١٢٦	١٢٦
٨	٥	٦٤	٢٥	٤٠	٤٠
٧١	٤٠	٨٧٣	٢٧٨	٤٨٤	٤٨٤

من الجدول

$$n = 6$$

$$K_s = 71$$

$$K_v = 40$$

$$K_s^2 = 873$$

$$K_v^2 = 278$$

$$K_s \times K_v = 484$$

ثم نطبق القانون



$$2, 1523 \approx \frac{71 \times 0.3229 - 2.}{7} = \frac{\text{حصہ - بکس}}{7} = 1 \therefore$$

$$\therefore \text{ص} = ۲,۸۶۶۳ + ۳,۳۲۴۹ = \text{س}$$
$$\Delta, .977 = \gamma \times .,3589 + 2,8223 = 0.977$$
$$\Sigma, \lambda \vdash \Gamma = \lambda \times \langle 3529 \rangle + \Gamma, \lambda \vdash \Gamma = \omega \therefore$$

١٠ مقدار الخطأ = القيمة الجدولية - القيمة الاختدافية

$$\therefore, \lambda \Delta \gamma = \left| \sum, \lambda \lambda \varepsilon \gamma - \Delta \right| =$$

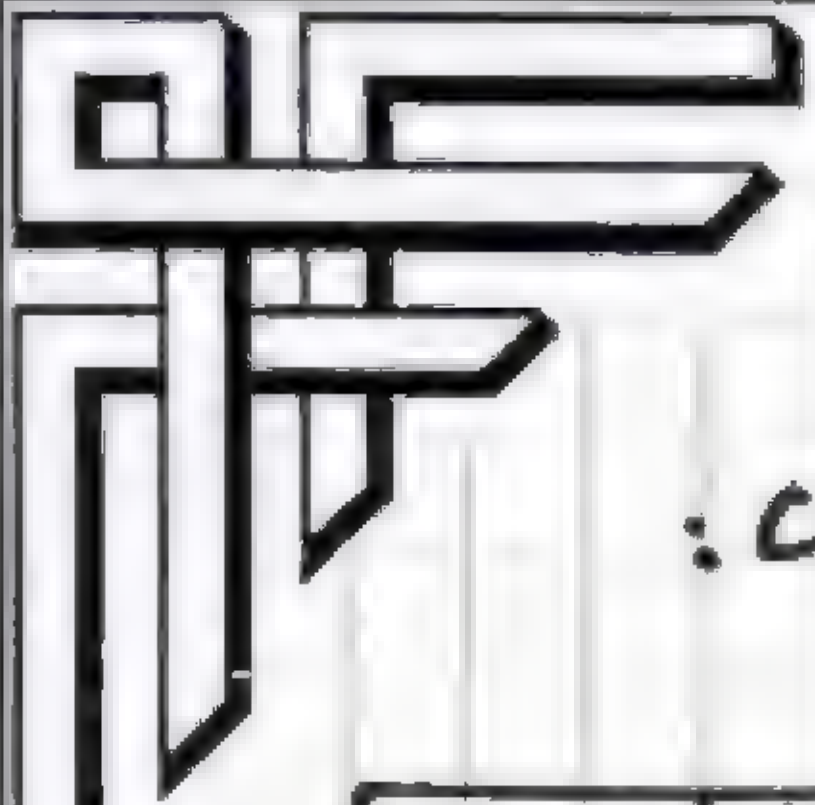
## حویہ سے عظمت:

نوع الدب سباح طردی

۱۔ اذا كانت







## مثال ١:

الجدول التالي يمثل إنتاج أحد المحاصيل الزراعية (ص) من المساحة المزرعة (س) بالفدان:

س	٥٠	٢٠٠	١١٠	٨٠	١٢٠	٧٤,٥	٨٨,٩	٥٧	١١	٣,٢
ص	١٤٠	٥٠٠	٤٠٠	٣٠٠	٣٥٦	٢٤٠,٥	٢٠٠,٦	٣٣,٥	٦٩,٨	١٨,٧

- أوجد معادلة خط الانحدار
- تنبأ بقيمة الإنتاج بالكيلو إذا كانت المساحة المزرعة تساوي ١٠٠ فدان
- أوجد مقدار الخطأ في الإنتاج إذا علمت أن المساحة المزرعة ١٢٠ فدان.

## الحل:

من الجدول:

$$n = 10$$

$$\sum x = 763,3$$

$$\sum y = 2259,1$$

$$\sum x^2 = 19,17$$

$$\sum y^2 = 75,76$$

كس ص

$$= 254489,18$$

حسب قيمة ب

س	ص	س <sup>٢</sup>	ص <sup>٢</sup>	س × ص
٥٠	١٤٠	٢٥٠٠	١٩٦٠٠	٧٠٠٠
٢٠٠	٥٠٠	٤٠٠٠٠	٢٥٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠
١١٠	٤٠٠	١٢١٠٠	١٦٠٠٠٠	٤٤٠٠٠
٨٠	٣٠٠	٦٤٠٠	٩٠٠٠٠	٢٤٠٠٠
١٢٠	٣٥٦	١٤٤٠٠	١٢٦٧٣٦	٤٢٧٢٠
٧٤,٥	٢٤٠,٥	٥٥٥٠,٢٥	٥٧٨٤٠,٢٥	١٧٩١٧,٢٥
٨٨,٩	٢٠٠,٦	٧٩٠٣,٢١	٤٠٢٤٠,٣٦	١٧٨٣٣,٣٤
٥٧	٣٣,٥	٣٢,٤٩	١١٢٢,٢٥	١٩٠,٩٥
١١	٦٩,٨	١٢١	٤٨٧٢,٠٤	٧٦٧,٨
٣,٢	١٨,٧	١٠,٢٤	٣٤٩,٦٩	٥٩,٨٤
٧٤٣,٣	٢٢٥٩,١	٨٩٠١٧,١٩	٧٥٧٦,٥٩	٢٥٤٤٨٩,١٨

ب

$$\therefore \text{ب} = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} = \frac{10(254489,18) - (763,3)(2259,1)}{10(19,17) - (763,3)^2} \approx 37,56$$





حسب قيمة  $P$  :  $P = \bar{C} - B \bar{S}$  حيث :

$$\frac{K_S}{n} = \bar{S} , \quad \frac{K_C}{n} = \bar{C}$$

$$\therefore \bar{S} = \frac{743,3}{10} = 74,33 , \quad \bar{C} = \frac{2259,1}{10} = 225,91$$

$$\therefore P = 225,91 - 74,33 \times 2,5637 = 35,35$$

∴ معادلة خط الانحدار هي  $C = P + B S$

$$\therefore C = 35,35 + 2,5637 S$$

ثانياً: بالتقريب عن  $S = 100$

$$\therefore C = 35,35 + 2,5637 \times 100 = 291,72 \text{ كـلوجرام}$$

ثالثاً: ليحدد مقدار الخطأ عند  $S = 120$  فذات

$$\therefore C = 35,35 + 2,5637 \times 120 = 343$$

∴ مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية - القيمة الانحدارية |

$$= | 343 - 356 | = 13$$

**سؤال ٤ :** في دراسة العلاقة بين الدخل (س) والاستهلاك

(ص) بالآلاف الجنيهات كانت النتائج الآتية :

$$K_S = 120 , K_C = 720 , K_{SS} = 516 , K_{SC} = 720$$

$$K_{CC} = 410 , n = 40$$

١) أوجد معادلة خط الانحدار ؟

٢) أوجد معامل الارتباط الخطي بين س، ص بطريقة بيرسون

وحدد نوعه ؟

٣) قنباً بقيمة الاستهلاك (ص)

عندما يصل الدخل ... ١٠ جنيه ؟





**الحل:** نؤجر ب حيث  $b = \frac{120 \times 3 - 3 \times 3}{120 - 3}$

$$b = \frac{120 \times 3 - 3 \times 3}{120 - 3}$$

$$b = \frac{(100 \times 120) - 516 \times 40}{(120)^2 - 720 \times 40} = 0.7$$

$$a = \frac{120 \times 3 - 100 \times 0.7}{40} = 1.3$$

معادلة خط الانحدار هي  $\hat{y} = a + bx$

$$\hat{y} = 1.3 + 0.7x$$

عند  $x = 100$ ،  $\hat{y} = 1.3 + 0.7 \times 100 = 71.3$

تم إيجاد معامل الارتباط بين  $x$  و  $y$

$$r = \frac{120 \times 3 - 100 \times 3}{\sqrt{(120^2 - 100^2)(3^2 - 3^2)}} = 0.9$$

$$r = \frac{(100 \times 120) - 516 \times 40}{\sqrt{(120^2 - 720 \times 40)(3^2 - 516^2)}} = 0.9$$

طردى قوى

## اختار:

١) المعادلة الإحصائية لمعادلة خط الانحدار حيث  $b$  معامل الانحدار هي  $\hat{y} = a + bx$

٢) إذا كانت معادلة خط الانحدار هي  $\hat{y} = 3 + 0.5x$  فإنه قيمة  $a$  المتوقعة عند  $x = 6$  هي: ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨

٣) إذا وقعت النقطتان (٥، ١٠) و (١٠، ٥) على خط انحدار  $\hat{y} = ax + b$  فإن الارتباط بين  $x$  و  $y$  يكون:

طردياً ، عكسياً ، تاماً ، منعكساً

٤) إذا كانت معادلة خط الانحدار هي  $\hat{y} = 3 - 0.5x$  فإنه نوع الارتباط يكون:

طردياً تاماً ، لا يوجد ارتباط ، منعكساً ، عكسياً تاماً



## باب الثاني

### الاحتمال الشرطي - الأحداث المستقلة

تذكأت:

$$١ \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{احتمال وقوع الحدث } A \text{ بشرط وقوع الحدث } B$$

$$٢ \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{احتمال عدم وقوع } A \text{ بشرط وقوع } B \text{ (نقي } P)$$

$$٣ \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$\leftarrow U$  : أو / أي من / على الأقل / مصدر الحدث

$\leftarrow \cap$  : و / كلاهما معاً

$$٤ \quad P(A \cap B) = P(A) - P(A - B) = P(B) - P(B - A)$$

احتمال وقوع  $A$  فقط - احتمال وقوع  $A$  ونقي  $B$

$$٥ \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{احتمال عدم وقوعهما معاً}$$

أو أحدهما على الأكثر

$$٦ \quad P(A \cap B) = P(A) - P(A - B) \quad \text{احتمال عدم وقوع أي منهما}$$

$$٧ \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال عدم وقوع  $A$  فقط (عدم وقوع  $A$  بمفرده)

ملاحظات

$$١ \quad \text{إذا كان } P(A|B) = P(A) \text{ ، فإن } A \text{ و } B \text{ مستقلان} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$٢ \quad \text{إذا كان } P(A|B) = P(A) \text{ ، فإن } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ ، } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$٣ \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{، } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{، } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



## الإحتمال الشرطي:

إذا كانه  $P, A \subset B$  ف فإنه:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{احتمال التقاطع}}{\text{الاحتمال الثاني}}$$

وتقرأ احتمال  $P$  بشرط  $B$

### ملحوظة:

الحدث الأول يأتي بعد كلمة احتمال والحدث الثاني يأتي بعد كلمة: علمًا بأن - إذا علم أن - بشرط - إذا كان....

### مثال:

إذا كانه  $P(A) = 0.3$  ،  $P(B) = 0.4$  ،  $P(A \cap B) = 0.2$  ،

إذا كانه  $P, A \subset B$  ففنا الفينة فأوجد:

- ①  $P(A/B)$       ②  $P(B/A)$       ③  $P(B'/A')$

### الحل:

$$① \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2}$$

$$② \quad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}$$

$$③ \quad P(B'/A') = \frac{P(A \cap B) - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} = \frac{0.2 - 0.3 - 0.4 + 0.2}{0.3 + 0.4 - 0.2} = \frac{1}{7}$$

### مثال:

فصل دراسي به ٥٠ طالب فإذا كانه ١٥ طالب منهم يرسبون في الكيمياء ، ٢٥ طالب منهم يرسبون في الأحياء ، ١٠ منهم يرسبون في المادتين معاً أوجد احتمال أن يكون الطالب حسن يرسب في:

تذكر:  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   
 $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$





- ١) التلميذ بشرط الأحماء ؟
- ٢) الأحماء إذا كان رأسياً للأحماء ؟
- ٣) الأحماء إذا علم أنه لا يرغب التلميذ ؟

**الحل:** بفرض أن: التلميذ ← P ، الأحماء ← B ، التلميذ والأحماء

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} = (P \cap B) \quad , \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{5} = (B) \quad , \quad \frac{3}{10} = \frac{1}{5} = (P)$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} \div \frac{1}{5} = \frac{(P \cap B)}{(B)} = (P/B) \quad ١$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{15} = \frac{2}{10} \div \frac{1}{5} = \frac{(P \cap B)}{(P)} = (P/B) \quad ٢$$

$$\frac{3}{7} = \frac{7}{10} \div \frac{3}{10} = \frac{(P \cap B)}{(P)} = (P/B) \quad ٣$$

لاحظ:

$$(P \cap B) - (P \cap B) = \frac{3}{10} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

$$(P) - 1 = \frac{3}{10} - 1 = \frac{7}{10}$$

## الأحداث المستقلة

يقال أن P ، B أحداثان مستقلتان إذا كان:

$$(P \cap B) = (P) \times (B)$$

احتمال تقاطع الحدثين = احتمال الحدث الأول × الثاني

**مثال:** إذا كانه  $(P) = \frac{6}{10}$  ،  $(B) = \frac{3}{10}$  ،  $(P - B) = \frac{4}{10}$  ، أثبت أن P ، B أحداثان مستقلتان ؟

$$(P - B) = (P) - (P \cap B) \quad \therefore$$

$$\frac{4}{10} = \frac{6}{10} - (P \cap B) \quad \therefore (P \cap B) = \frac{6}{10} - \frac{4}{10} = \frac{2}{10} \quad ١$$

$$(P) \times (B) = \frac{6}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{18}{100} = \frac{9}{50} \quad ٢$$

$$(P \cap B) = (P) \times (B) \quad \therefore$$

الأحداث P ، B مستقلتان





**سؤال:** إذا كان  $P, B$  حدثين مستقلين وكان:

$$P = 0.6, L(B) = 0.3, \text{ فأوجد كلا من:}$$

$$(1) L(P \cap B) \quad (2) L(P \cup B) \quad (3) L(B/P)$$

**الحل:**  $P, B$  حدثين مستقلين

$$(1) L(P \cap B) = L(P) \times L(B) = 0.6 \times 0.3 = 0.18$$

$$(2) L(P \cup B) = L(P) + L(B) - L(P \cap B)$$

$$= 0.6 + 0.3 - 0.18 = 0.72$$

$$(3) L(B/P) = \frac{L(P \cap B)}{L(P)} = \frac{0.18}{0.6} = 0.3$$

**سؤال:** أطلو جينديار قذيفة نحو هدف ما فإذا كان  $P = 0.7$

$$L(B) = 0.5, \text{ أوجد احتمال إصابة الهدف بقذيفة واحدة فقط}$$

**الحل:**  $\therefore$  إصابة الهدف من أحدهما لا تؤثر في الآخر

$\therefore$  الحدثان  $P, B$  مستقلين.

$$\therefore L(P \cap B) = L(P) \times L(B) = 0.7 \times 0.5 = 0.35$$

$\therefore$  احتمال إصابة الهدف بقذيفة واحدة فقط

$$= L(P - B) + L(B - P)$$

$$= L(P) - L(P \cap B) + L(B) - L(P \cap B)$$

$$= 0.7 - 0.35 + 0.5 - 0.35 = 0.5$$

**ملاحظات**

$$(1) \text{ إذا كان } L(P \cap B) \neq L(P) \times L(B)$$

فإن الحدثين  $P, B$  غير مستقلين.

$$(2) \text{ إذا كان } P, B \text{ حدثين مستقلين وكان } L(B) \neq L(B/P) \text{ فإن:}$$

$$L(P) = L(B/P)$$



٣) الحدثين المتنافيين  $P$ ،  $B$  يكونان مستقلين إذا وفقط إذا كان  $L(P) \times L(B) = \text{صفر}$

**سؤال:** ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإنه كان  $P$  حدث ظهور عدد زوجي،  $B$  حدث ظهور عدد أولي هل  $P$ ،  $B$  حدثين مستقلين؟

**الحل:**

$$P = \{2, 4, 6\} \Rightarrow L(P) = \frac{1}{6} \quad B = \{2, 3, 5\} \Rightarrow L(B) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore L(P) \times L(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \Rightarrow \frac{1}{6} \neq \frac{1}{36}$$

$$\therefore B \cap P = \{2\} \Rightarrow L(B \cap P) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{36}$$

منه  $\square$ ،  $\square$  نجد أنه  $L(B \cap P) \neq L(P) \times L(B)$

$\therefore P$ ،  $B$  غير مستقلين.

٤) **سؤال:** إذا كان  $P$ ،  $B$  حدثين من فضاء عينة وكان  $L(P) = 0.5$ ،  $L(B) = 0.6$ ،  $L(P \cup B) = 0.8$ . بتي مع ذكر السبب هل  $P$ ،  $B$  حدثين مستقلين أم لا؟

**الحل:**

**سؤال:** ليس محتوي على ٣ كرات حمراء، ٥ كرات سوداء، إذا حبت كرتان الواحدة تلو الأخرى دون إرجاع (إرجاع) فما احتمال أن تلو: ١) الكرتان سوداوين؟ ٢) الأولى سوداء والأخرى حمراء؟ ٣) إحدى الكرتين حمراء والأخرى سوداء؟



## الحل

١) الأولي سوداء (و) الثانية سوداء

$$\frac{5}{12} = \frac{4}{7} \times \frac{5}{8} =$$

٢) الأولي سوداء (و) الثانية حمراء

$$\frac{15}{56} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{8} =$$

٣) الأولي حمراء (و) الثانية سوداء (و) الأولي سوداء (و) الثانية حمراء

$$\frac{15}{28} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{8} + \frac{5}{7} \times \frac{3}{8} =$$

لاحظ في المثال السابع: (و) ← (ن) ← (X)  
والكسر الثاني طرفه مقام واحد لأنه السبب بدون إحلال

## تمارين:

١) إذا كانه P، B حدثين من فضاء عينة وكانه L (B) = 0.3 ، L (P ∪ B) = 0.72 ،

أوجد قيمة L (P) إذا كانه P، B ① حدثين متنافيين

② حدثين مستقلين

٢) إذا كانه P، B حدثين مستقلين وكانه L (P) = 0.2 ، L (B) = 0.6 ،

فاوجد قيمة L (P ∪ B) ، L (P - B) ، L (B / P) ؟

٣) ليس محتوى على لاكرات بيضاء و ٣ كرات خضراء فإذا سحب كرتاه

الواحدة تلو الأخرى دون إحلال ما احتمال أنه تكون :

① الكرتاه بيضاءون ؟

② الأولي بيضاء والثانية خضراء ؟

③ إحدى الكرتين بيضاء والأخرى خضراء ؟

٤) إذا كانه L (P / B) =  $\frac{2}{3}$  ، L (B / P) =  $\frac{4}{7}$  ، L (B) =  $\frac{3}{5}$  فاوجد :

L (P ∪ B) ، L (P ∩ B) ؟



## الباب الثالث

### المتغير العشوائي المنقطع

**تعريف:** المتغير العشوائي المنقطع هو دالة مجالها  $F$  ومجالها المقابل  $E$

**مثال توضيحي:** في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين

فإن  $\Omega = \{(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)\}$

إذا كان المتغير العشوائي هو عدد الكتابات فإن:

مدى المتغير العشوائي  $= \{1, 2, 3\}$

**ملاحظة:** التجربة الواحدة يعرف عليها العديد من المتغيرات العشوائية

**التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:** هو جدول كتابته بالشكل:

المتغير العشوائي	0	1	2	المجموع
الاحتمال $P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

حيث  $x_i$  يعبر عن المدى

$P(X=x_i)$  تعبر عن الاحتمالات المناظرة

ولاحظ دائماً أن  $\sum P(X=x_i) = 1$

وهذا الجدول السابغ يمثل التوزيع الاحتمال للمكان السابغ التوضيحي.

**مسألة:** إذا كان  $X$  متغيراً عشوائياً مداه  $\{1, 2, 3\}$  وكان:

$$P_1 = (1=x), P_2 = (2=x), P_3 = (3=x) \text{ ، } P = (3=x)$$

فأوجد قيمة  $P$  ؟

$\therefore$  من متغير عشوائي  $\therefore \sum P(X=x_i) = 1$

$$1 = P + P_2 + P_3 \Rightarrow 1 = P + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow P = \frac{1}{4}$$

**الحل:**



## كيفية حساب :

- ① الوسط الحسابي (التوقع)  $\bar{x}$
  - ② التباين  $\sigma^2$
  - ③ الانحراف المعياري  $\sigma$
- نكون جدولاً كالتالي :

س.ر	د.س.ر (س.ر)	س.ر.د (س.ر)	س.ر.د (س.ر)
① المدى العمود الأول	⑤ الإختلاف العمود الثاني	① × ② العمود الثالث	① × ③ العمود الرابع
ج	١	ك.س.د (س.ر) = $\bar{x}$	ك.س.ر.د (س.ر)

وبعد ما تامل الجدول يكون :

- \* الوسط الحسابي  $\bar{x} = \frac{\text{ك.س.ر.د (س.ر)}}{\text{ك.س.د (س.ر)}}$  يعني مجموع العمود الثالث
- \* التباين  $\sigma^2 = \frac{\text{ك.س.ر.د (س.ر)}}{\text{ك.س.د (س.ر)}} - \bar{x}^2$  يعني مجموع العمود الرابع -  $\bar{x}^2$
- \* الانحراف المعياري  $\sigma = \sqrt{\text{التباين}}$
- \* معامل الاختلاف  $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

**مثال :** إذا كانه أحد المصانع ينتج نوعين من المصابيح ٢، ٣ وكانه متوسط العمر لهما بالساعة ١٨٥٠ ، ١٥٨٠ وانحرافهما المعياري بالساعة ٢٥ ، ٣٣ على الترتيب احسب :  
معامل الاختلاف لكل منهما ، ماذا استدل حفظ ؟

**الحل :**



$$\text{معامل اختلاف } P = \frac{250}{185} \times 100\% = 13.5\%$$

$$\text{معامل اختلاف } B = \frac{23}{158} \times 100\% = 14.56\%$$

نلاحظ أنه النوع B أكثر تشتتاً من P.

**مثال:** إذا كان من متغيراً عشوائياً متقطعاً توزيعه الاحتمالي

س	٠	١	٢	٣
د (س)	٠.٣٥	٠.٤	٠.٢	٠.١

كالقالي  
أوجد قيمة P ثم احسب  
كل ما من:

الوسط الحسابي - الانحراف المعياري - معامل الاختلاف ؟

**الحل:**

س	د (س)	س. د (س)	س. د (س)
٠	٠.٣٥	٠	٠.٣٥
١	٠.٤	٠.٤	٠.٤
٢	٠.١٥	٠.٣	٠.٦
٣	٠.١	٠.٣	٠.٩
مجم	١	١	١.٩

∴ من متغير عشوائي

$$\therefore 1 = \sum_{i=1}^n P_i = 1$$

$$1 = 0.35 + 0.4 + 0.15 + 0.1$$

$$\therefore P = 1 - 0.85 = 0.15$$

من الجدول المقابل:

$$\bar{x} = 1.9$$

$$\bar{x} = 1.9 - 1 = 0.9, \quad \bar{x} = 0.9, \quad \bar{x} = 0.9$$

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{0.9}{1.9} \times 100\% = 47.37\%$$

**مثال:** إذا كان من متغيراً عشوائياً متقطعاً توزيعه الاحتمالي

توزيعه الاحتمالي تتحدد بالعلاقة:  $P_i = \frac{P}{n}$  فإن قيمة

$$P = \dots$$

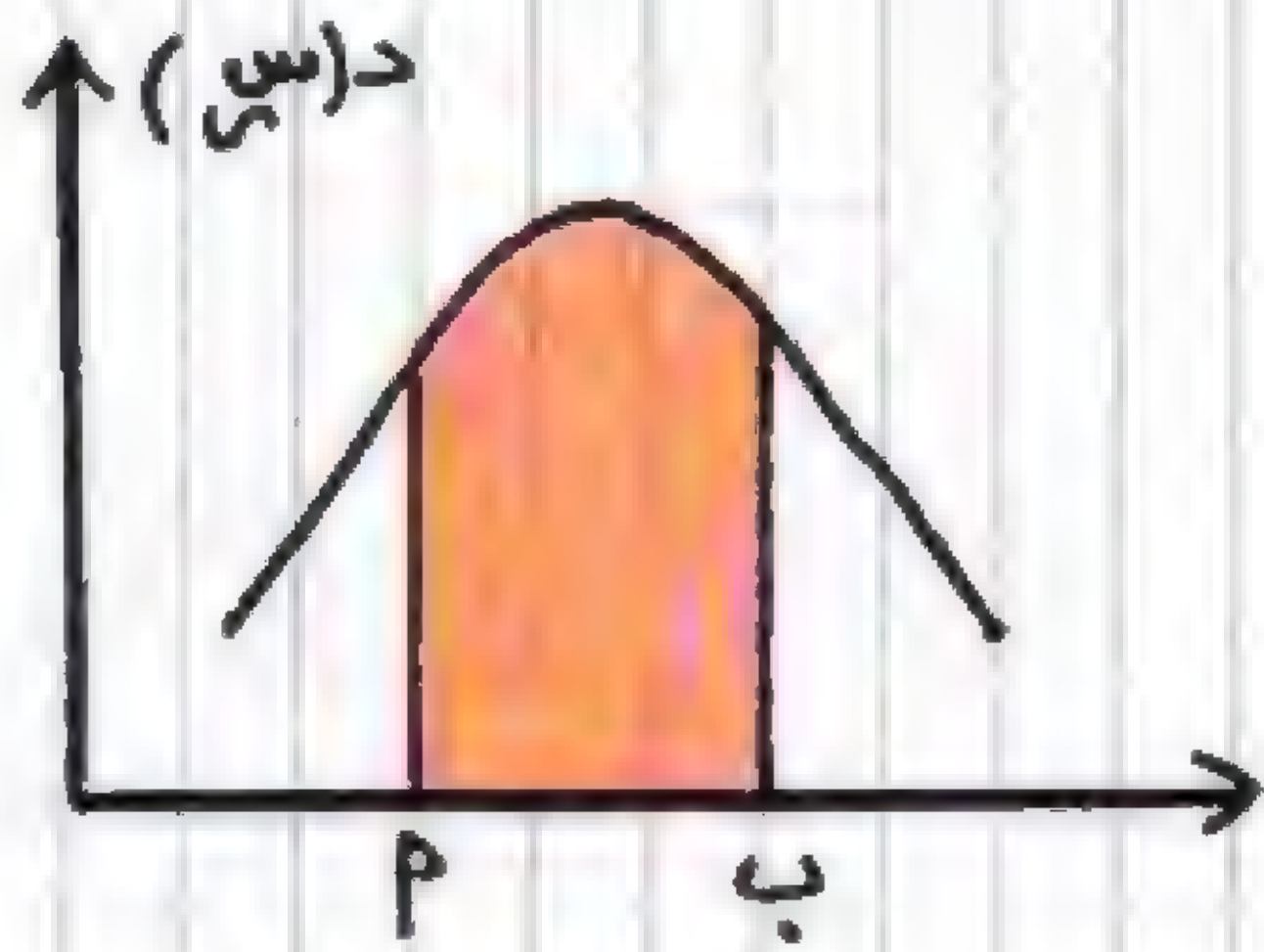
$$\therefore 1 = \sum_{i=1}^n P_i = 1 \quad \therefore 1 = P + P + P + \dots$$

$$\# \quad 2 = P \quad \Leftarrow \quad 7 = P^3 \quad \Leftarrow \quad 1 = \frac{P^2}{1} + \frac{P}{1} + 0 \quad \therefore$$



## المتغير العشوائي المتصل

هو متغير عشوائي مراه فترة مفتوحة أو مغلقة من الأعداد الحقيقية .  
تحقق لهذه الشروط :



- $D(S) \leq 0$  لجميع قيم  $S \in$  لمجال الرالة .
- مساحة المنطقة المظلمة الواقعة أسفل منحنى الرالة  $D$  وأعلى محور السينات  $= 1$

$$ل (P \geq S \geq B) = \text{مساحة المنطقة المظلمة}$$

$$= \frac{1}{P} \times [(B)D + (P)D] \times (P - B)$$

**سأله** إذا كان  $S$  متغيراً عشوائياً متصلاً

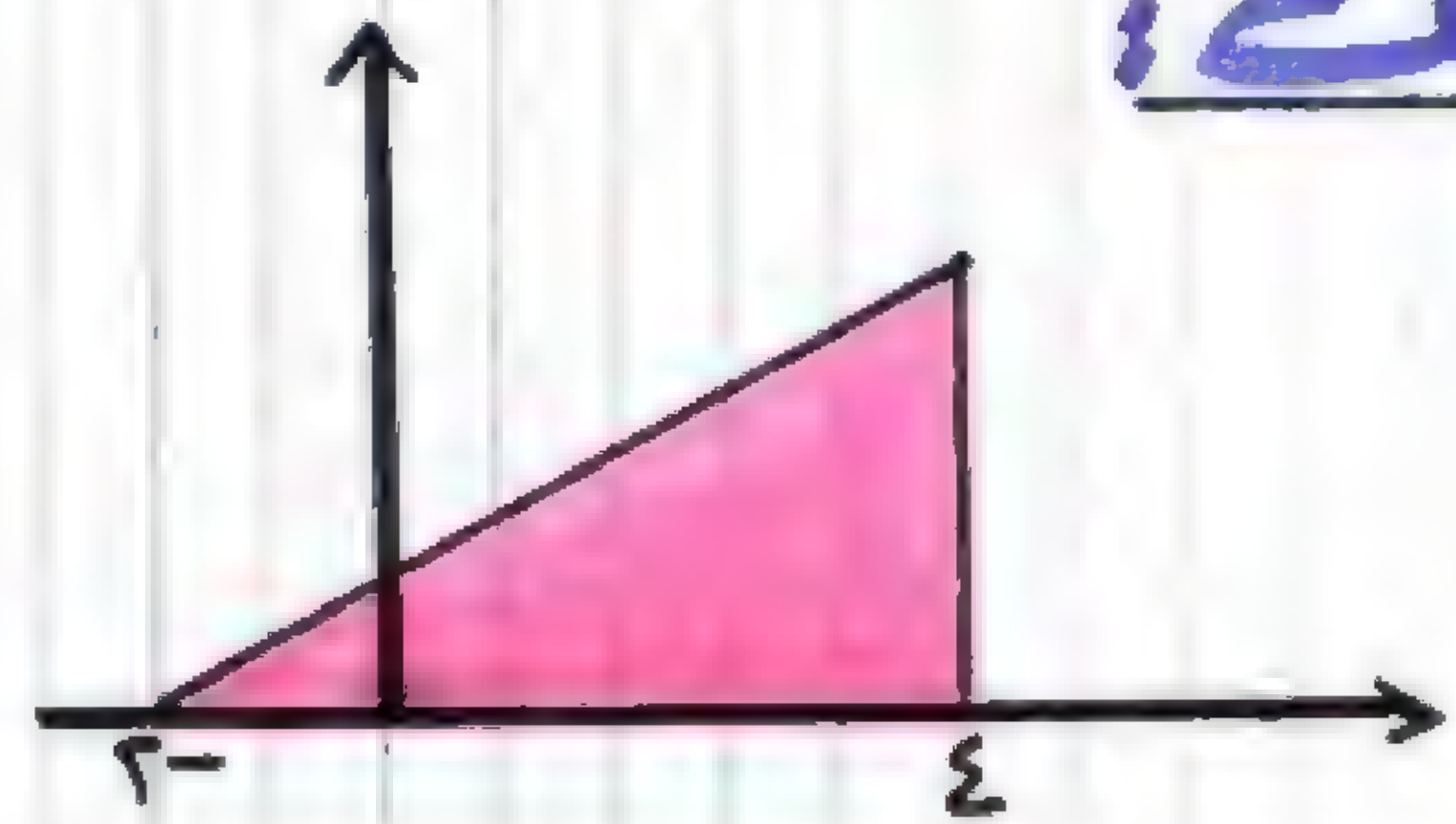
$$D(S) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{18} (S+2) , -2 \leq S \leq 4 \\ \text{صفر} , \text{فيما عدا ذلك} \end{array} \right.$$

① أثبت أن  $D(S)$  دالة كثافة احتمالية للمتغير  $S$

② أوجد  $L (S > 0)$

③ أوجد  $L (S < 2)$

**الحله**



$$D(-2) = \frac{1}{18} (-2+2) = 0$$

$$D(4) = \frac{1}{18} (4+2) = \frac{1}{3}$$

$$ل (-2 < S < 4) =$$

$$= \frac{1}{P} \times [(4)D + (-2)D] \times (4 - (-2))$$

$$= \frac{1}{P} \times [صفر + \frac{2}{9}] \times 6 = 1$$

∴  $D(S)$  دالة كثافة احتمالية

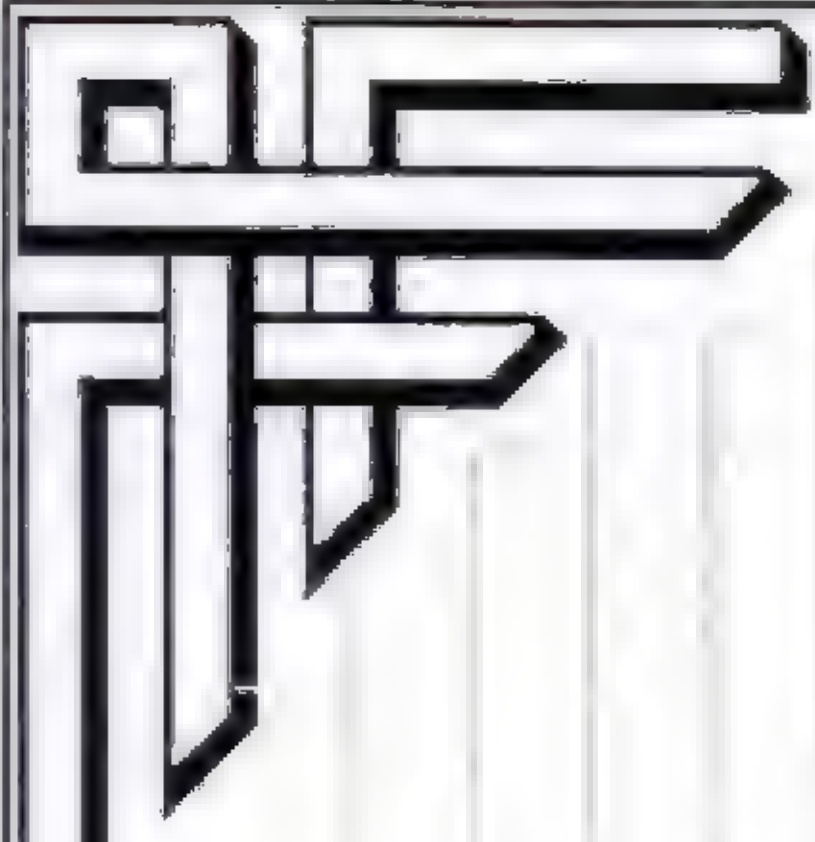
$$② ل (S > 0) = \frac{1}{P} \times [(0)D + (-2)D] \times (0 - (-2)) = \frac{2}{9}$$

$$= \frac{1}{P} \times [\frac{2}{9} + \frac{1}{9}] \times 2 = \frac{1}{3}$$

$$③ ل (S < 2) = ل (S > 2) = \frac{1}{P} \times [(2)D + (-2)D] \times (2 - (-2)) = \frac{5}{9}$$

$$= \frac{1}{P} \times [\frac{7}{18} + \frac{6}{18}] \times 2 = \frac{1}{3}$$



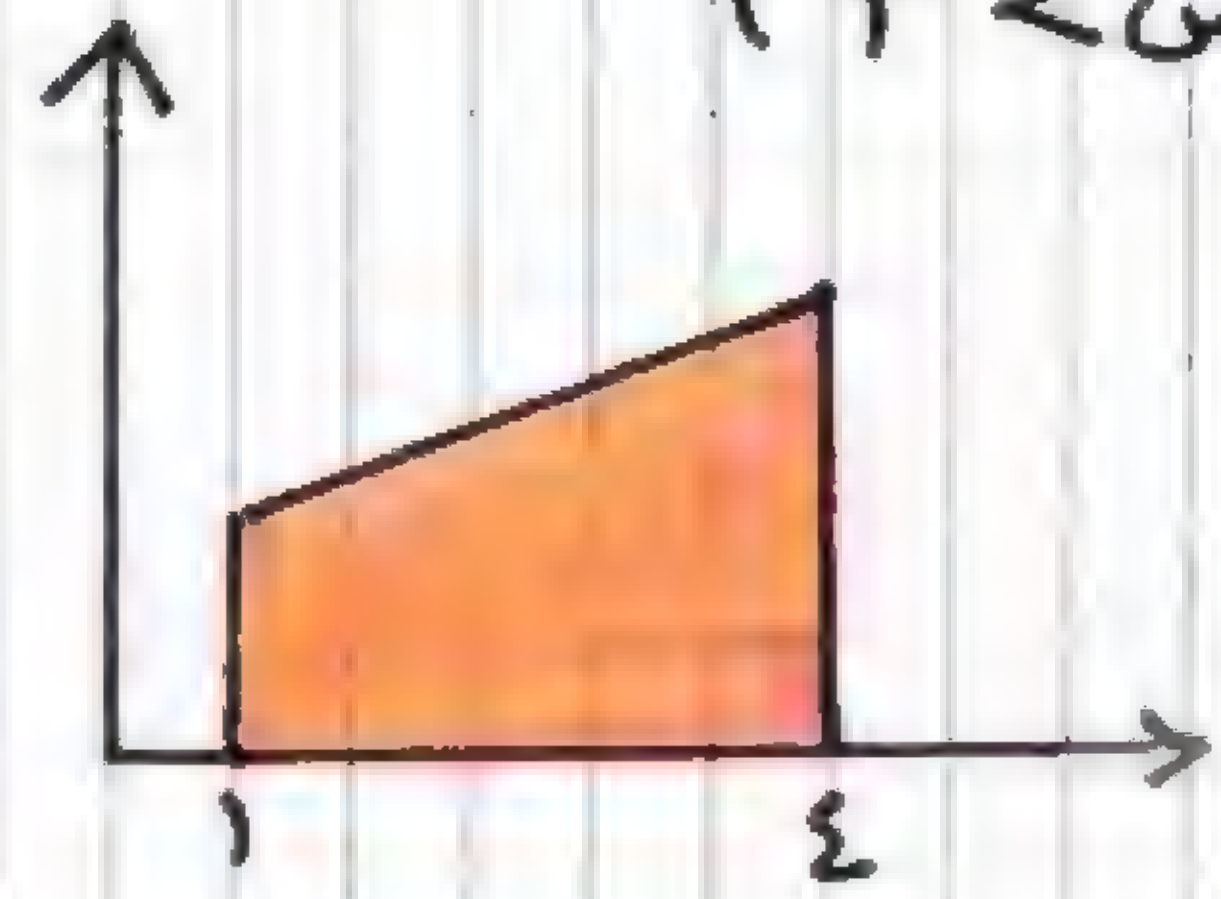


**سؤال:** إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً ودالة كثافة الاحتمال له :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2s+e}{24} \\ 1 < s < 4 \end{array} \right\} = D(s) \text{ صفر فيماعد ذلك}$$

- ① أوجد قيمة ك ② أوجد ل (س < 3)

**الحل:**



$$D(1) = \frac{2+e}{24} \text{ ، } D(4) = \frac{8+e}{24}$$

$$\therefore L(1 < s < 4) = 1$$

$$\therefore \frac{1}{3} = (1-e) [D(4) + D(1)]$$

$$\therefore \frac{1}{3} = 3 \times \left[ \frac{2+e}{24} + \frac{8+e}{24} \right]$$

$$\therefore \frac{1}{3} = 3 \times \frac{e+10}{24} \Rightarrow e+10=4 \Rightarrow e=-6$$

- ② ل (س < 3) = ل (3 < س < 4)

$$= \frac{1}{3} = (3-4) [D(4) + D(3)] = \frac{1}{3} \times \left[ \frac{14+e}{24} + \frac{11+e}{24} \right]$$

**سؤال:**

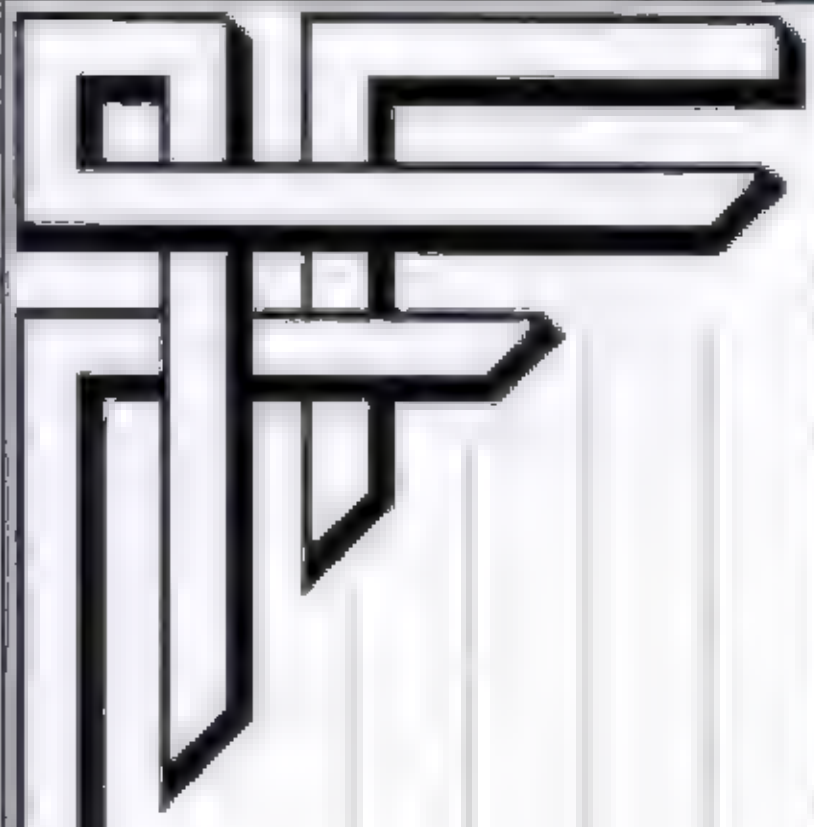
إذا كان س متغيراً عشوائياً ودالة كثافة الاحتمال له :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3s+p}{18} \\ 2 < s < 5 \end{array} \right\} = D(s) \text{ صفر فيماعد ذلك}$$

- ① أوجد قيمة p ؟ ② أوجد ل (س < 3) ؟

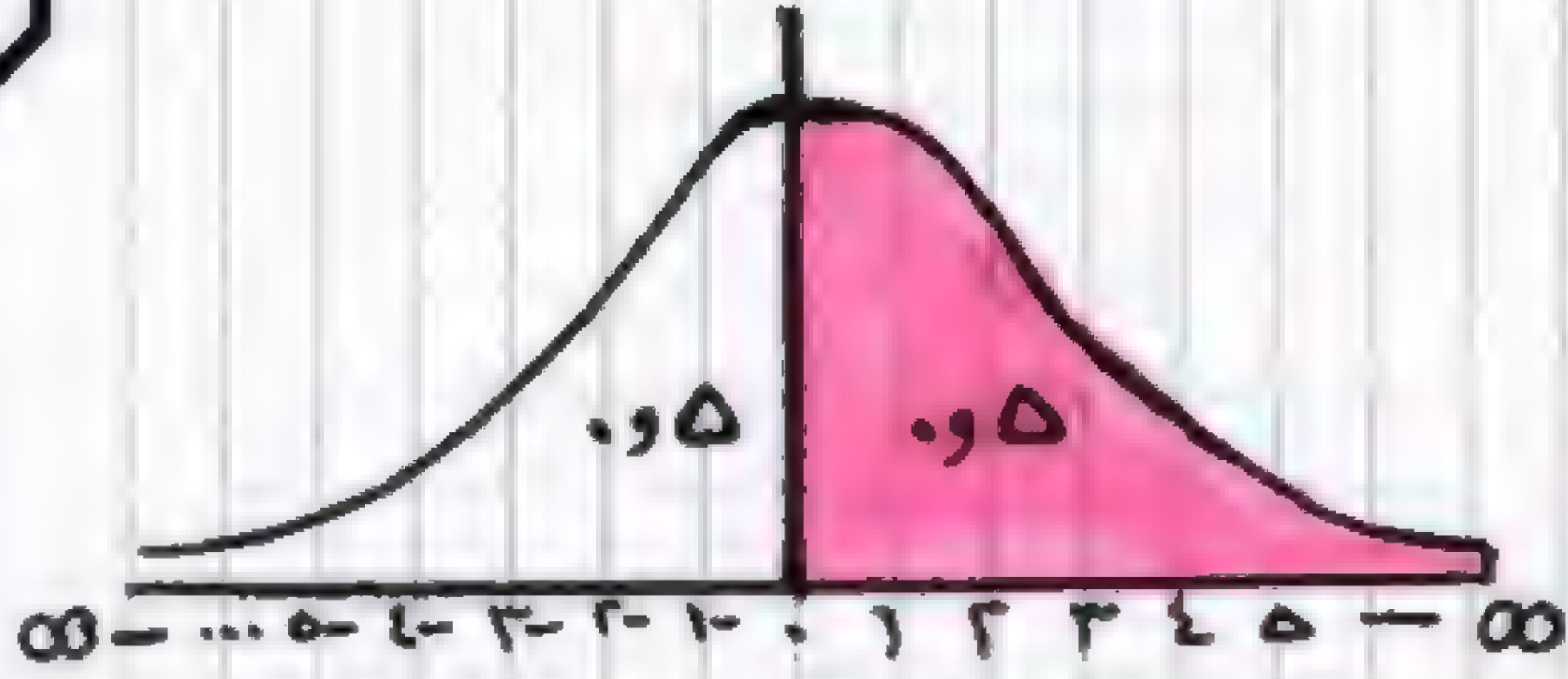
**الحل:**





# التوزيع الطبيعي

## الوحدة الرابعة

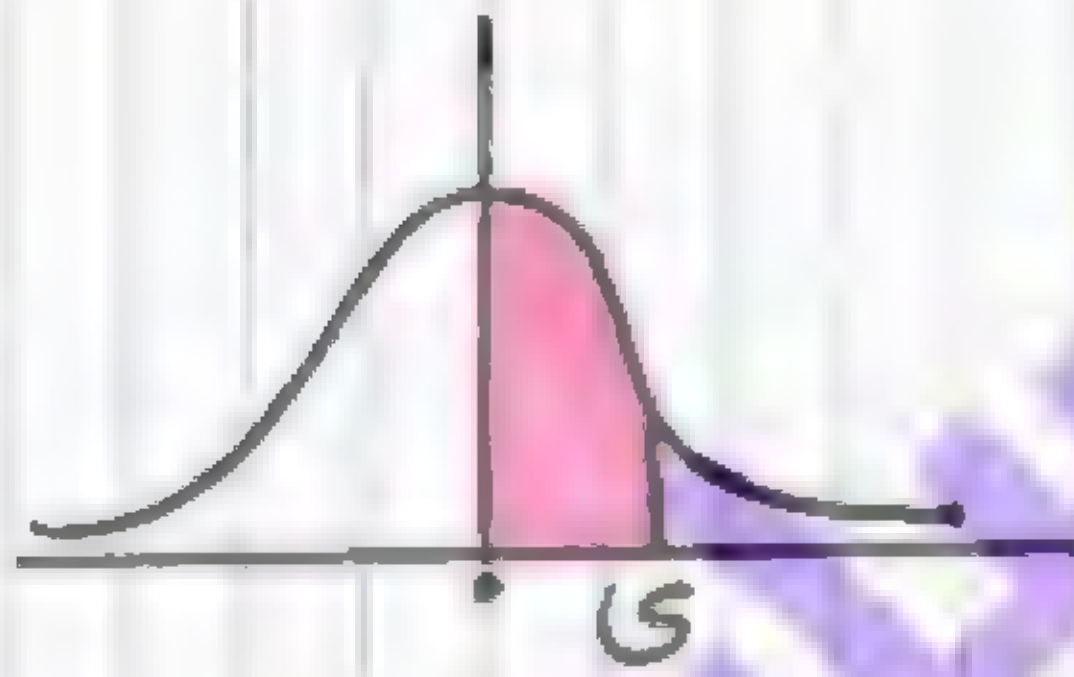


$$0 = \mu \quad 1 = \sigma$$

طرفي المنحنى يمتدان إلى ما لا نهاية دونه أنه يلتقي بمحور السينات

مساحة المنطقة أسفل المنحنى وفوقه = 1

من التماثل نجد أنه المحور الرأسى يقسم المساحة تحت المنحنى وفوقه المحور الأفقى إلى منطقتين مساحة كل منهما = 0.5



ل (ص ≤ 0) = ل (ص ≥ 0) = 0.5

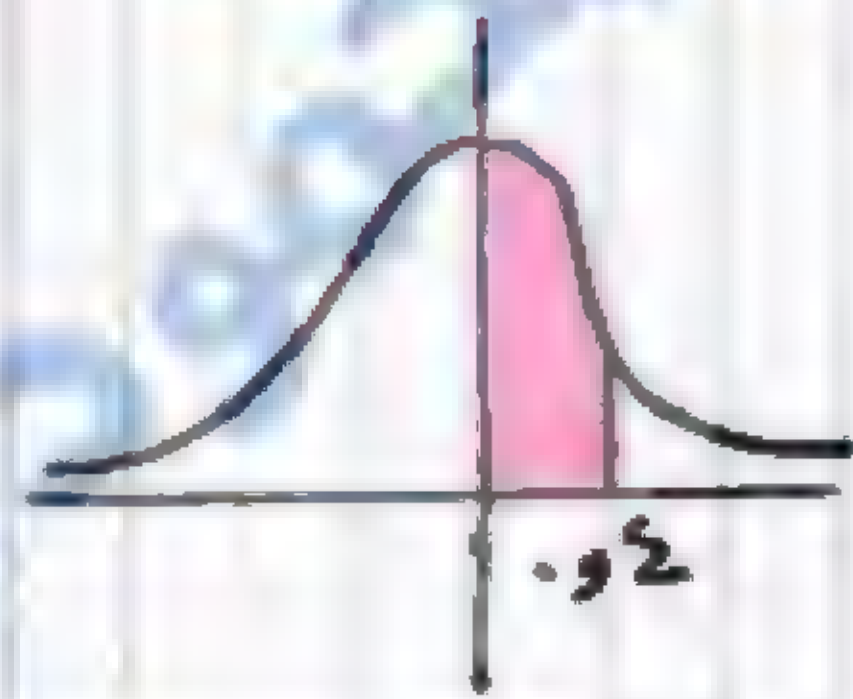
ل (0 ≤ ص ≤ 1) = مساحة المنطقة المظللة

حيث 1 عدد موجب يتسوب من الجدول مباشرة

### ملاحظات:

ل (0 ≤ ص ≤ 1) =

$$0.554 =$$

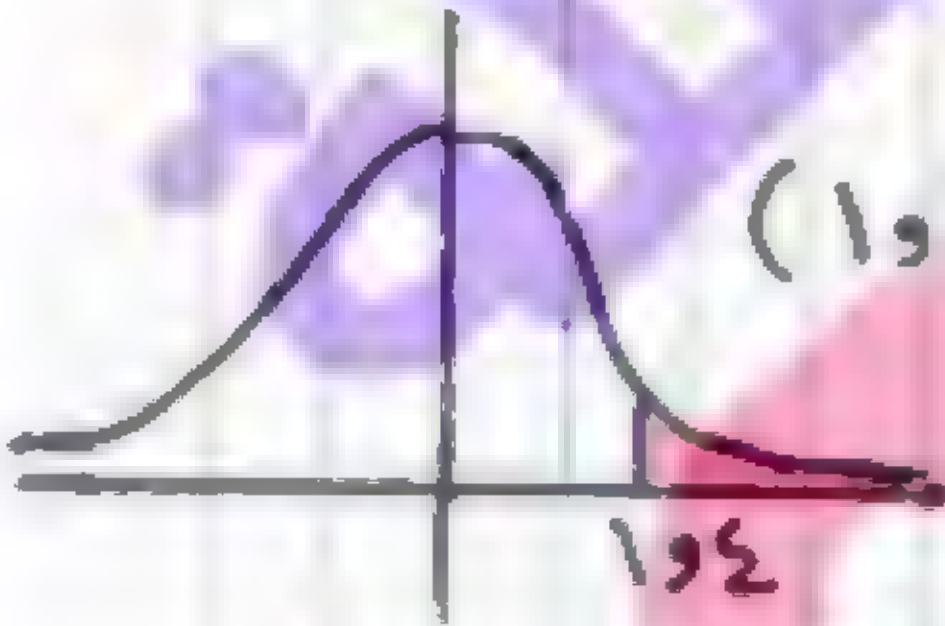


ل (ص ≤ 1) =

$$0.5 = ل (0 ≤ ص ≤ 1) + 0.5$$

$$0.554 + 0.5 =$$

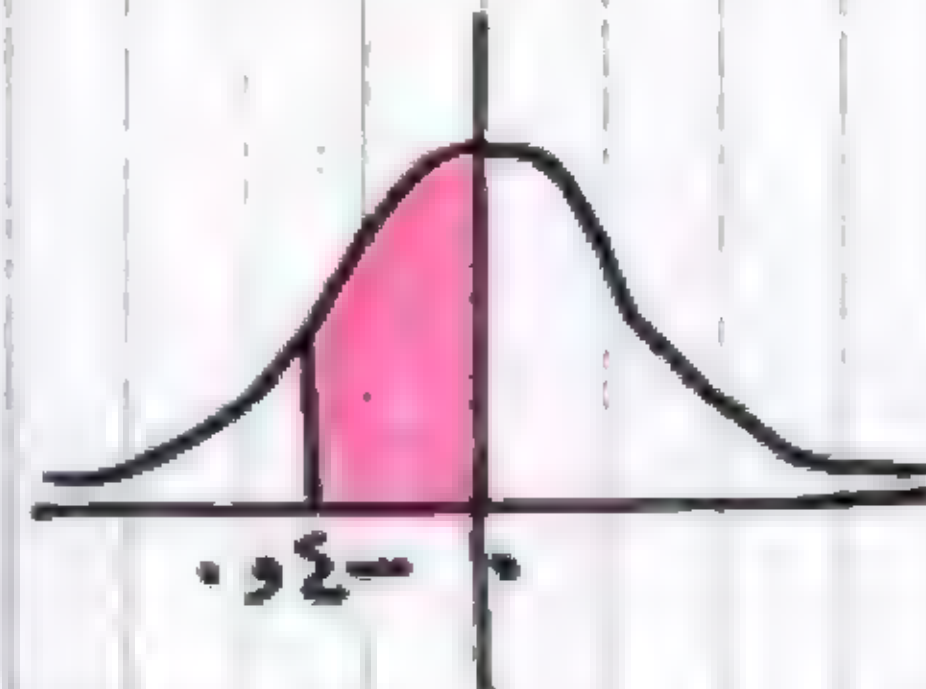
$$1.054 =$$



ل (-1 ≤ ص ≤ 1) =

$$ل (0 ≤ ص ≤ 1) + ل (-1 ≤ ص ≤ 0) =$$

$$0.554 + 0.5 =$$



ل (-1 ≤ ص ≤ 1) =

$$ل (0 ≤ ص ≤ 1) + ل (-1 ≤ ص ≤ 0) =$$

$$0.554 + 0.5 =$$

$$1.054 =$$

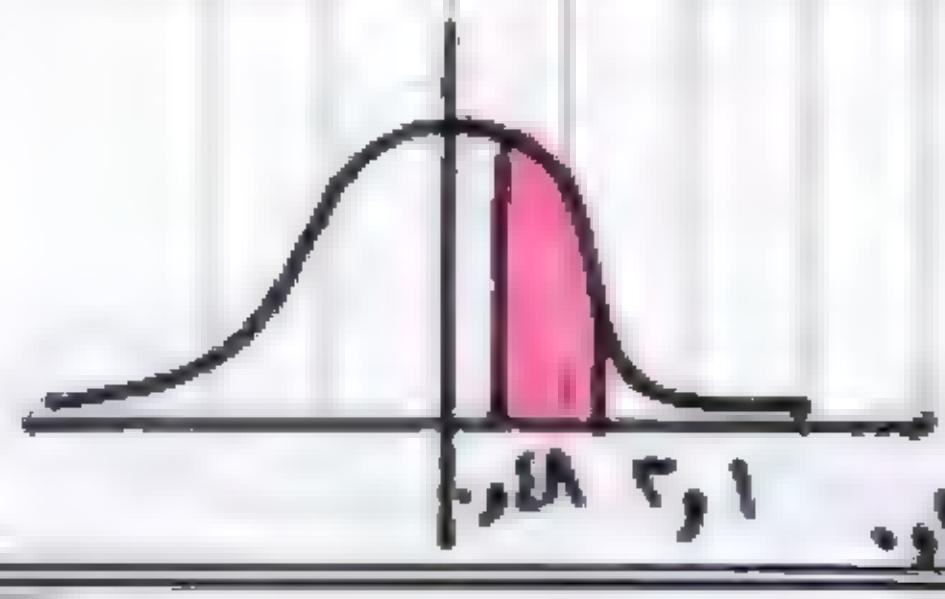


ل (0 ≤ ص ≤ 1) =

$$ل (0 ≤ ص ≤ 1) + ل (-1 ≤ ص ≤ 0) =$$

$$0.554 + 0.5 =$$

$$1.054 =$$





## مراجعات ليلة الامتحان

١ أوجد معامل ارتباط بيرسون

بين س، ص محددين أنو ٤٥ :

كس = ٢٨ ، كص = ١٦٧ ،

كس ص = ٨٤٩ ، كص = ٥١٧٩ ، ص = ٧

كس = ١٤١

الحل

$$r = \frac{n \cdot K_{SV} - K_S \times K_V}{\sqrt{(n \cdot K_S - K_S^2)(n \cdot K_V - K_V^2)}}$$

$$= \frac{(7 \cdot 849 - 28 \times 167)}{\sqrt{(7 \cdot 5179 - 28^2)(7 \cdot 141 - 167^2)}}$$

$$= \frac{(6043 - 4676)}{\sqrt{(4207 - 784)(1027 - 27889)}}$$

$$= \frac{1367}{\sqrt{3423 \cdot (-26862)}}$$

$$\approx 0.97 \text{ (طردى قوى)}$$

٣ احسب معامل الارتباط لسيرمان

بين س، ص وحدد نوعه ؟

س	٤٥	٣٥	٣٢	٤٠	٥٠	٣٢
ص	٢٨	٣٥	٤٠	٢٨	٢٢	٤٤

الحل

٤ احسب معامل الارتباط لسيرمان بين

س، ص وحدد نوعه ؟

س	٣٠	٢٨	٢٥	٢٤	٢٣	٢٠
ص	٢٨	٢٩	٢٧	٣٠	٣٦	٣٥

الحل

٢ من بيانات الجدول احسب معامل الارتباط

الخطي بين س، ص وحدد نوعه ؟

س	٣٠	٢٨	٢٥	٢٤	٢٣	٢٠
ص	٢٨	٢٩	٢٧	٣٠	٣٦	٣٥

الحل



٤ إذا كان  $S$  متغيراً عشوائياً متقطعاً  
توزيع الاحتمال بالجدول:

$S$	١	٠	١	٢	٣
$P(S)$	٠.٣	٠.١	٠.١	٠.٢	٠.٣

أوجد (١) قيمة  $E$   
(٢) التوقع (الموَّط)

**الحل**

$$\therefore \sum P(S) = 1$$

$$\therefore 0.3 + 0.1 + 0.1 + 0.2 + 0.3 = 1$$

$$\therefore 0.3 = 0.3$$

$S$	$P(S)$	$S \cdot P(S)$
١	٠.٣	٠.٣
٠	٠.١	٠
١	٠.١	٠.١
٢	٠.٢	٠.٤
٣	٠.٣	٠.٩
مجموع	١	١.٧

كأنياً من الجدول

$$E = \sum S \cdot P(S)$$

$$= 1.7$$

٥ إذا كان  $S$  متغيراً عشوائياً متقطعاً

مراه  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  وكان

$$P(S) = \frac{P}{15} + \frac{S}{15}$$

فأوجد:

(١) قيمة  $P$   
(٢) الانحراف المعياري

**الحل**

٦ إذا كان  $S$  متغيراً عشوائياً متقطعاً

$$P(S) = \frac{1-S}{8} \quad 1 \leq S \leq 5$$

فيما عدا ذلك

(أ) أثبت أن  $P(S)$  دالة كثافة احتمالية؟

(ب) احسب  $L(2 < S < 3)$

**الحل**

$$P(1) = 0, P(2) = \frac{1}{4}, P(3) = \frac{1}{4}, P(4) = \frac{1}{8}, P(5) = \frac{1}{8}$$

$$\therefore L(2 < S < 3) = P(2) + P(3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = [P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)] \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times [0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}]$$

$\therefore P(S)$  دالة احتمالية \*

$\therefore L(2 < S < 3) = P(2) + P(3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{4} = [P(2) + P(3)] \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

٧ إذا كان  $S$  متغيراً عشوائياً متقطعاً

لدالة كثافة احتمالية له هي:

$$P(S) = \frac{3+S}{27} \quad 1 \leq S \leq 4$$

فيما عدا ذلك

فأوجد (١)  $E$  (٢)  $L(S < 3)$ ؟

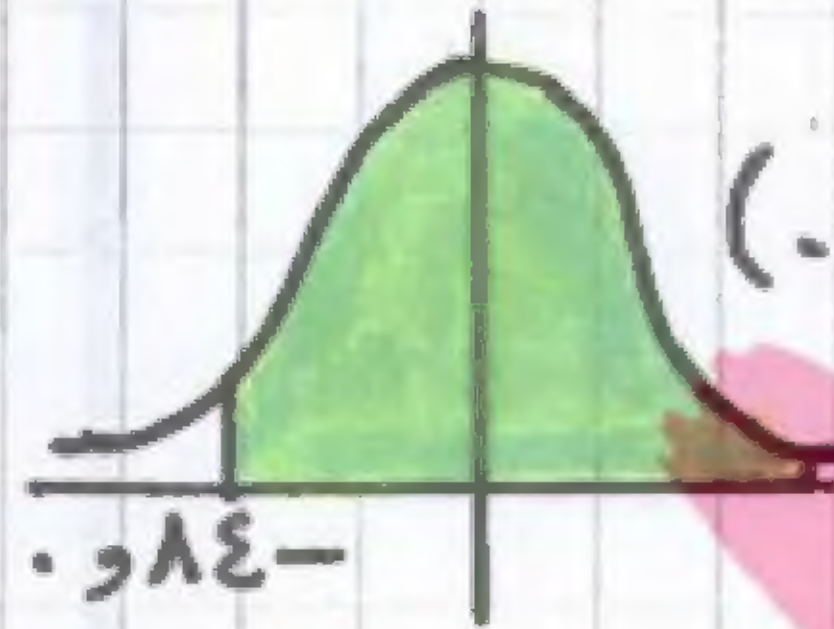
**الحل**



٨ إذا كان ص. متغير طبيعي معياري أوجد

١ ل (ص ≤ -0.84)

الحل



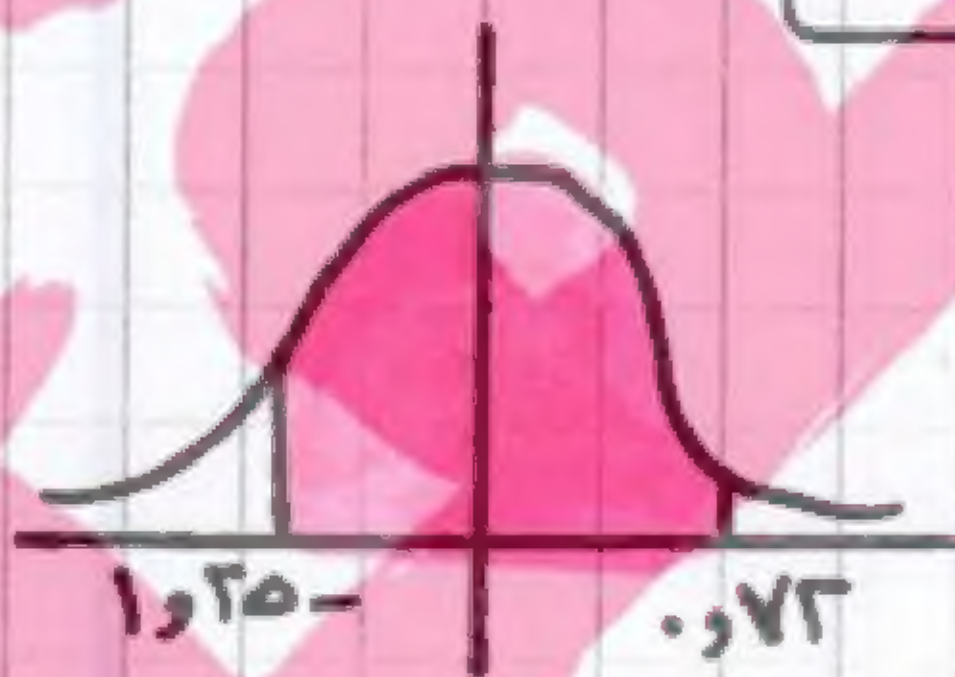
= 0.5 + ل (-0.84 ≤ ص ≤ 0)

= 0.5 + 0.2005

= 0.7005

٢ ل (-1.25 ≤ ص ≤ 0.72)

الحل



= ل (ص ≥ 1.25) + ل (ص ≥ 0.72)

= 0.1038 + 0.2358

= 0.3396

= 0.6604

٩ إذا كان ص. متغيراً عشوائياً طبيعياً

متوسطه ١٠ = ١٠ وانحرافه المعياري

٥ = ٢ فأوجد كلاً من:

١ ل (ص ≥ ١٢.٥)

٢ إذا كان ل (ص ≤ ١٠.٥٦) = ٠.١٠٥٦

فأوجد قيمة ل؟

الحل

١٠ إذا كانت أجور

٥٠ عامل تتبع توزيع

طبيعي متوسط حسابته

١٤ = ٧٥ جينياً وانحراف معياري

٥ = ١٠ أوجد:

١ النسبة المئوية لعدد العمال

الذين تزيد أجورهم عن ٨٠ جينياً

؟

٢ عدد العمال الذين تقل

أجورهم عن ٥٥ جينياً؟

الحل

١١ إذا كانت درجات بعض الطلاب هي

متغير عشوائي متوسطه ٤٤ وانحرافه

٥ حيث حصل ٢٢.٦٦ من الطلاب على

٥٠ من ٥٠ درجة فأوجد ٥؟

الحل



١٢ اختر الاجابة الصحيحة:

① أقوى معامل ارتباط عكسي فيما يلي هو.....

۰۹۶- ، ۰۹۹- ، ۰۹۱- ، صفرا

⑤ اذا كان  $P \supset B$  وكان  $\frac{P}{1} = (P)$  ،  $\frac{B}{2} = (B)$  ، فانه  $\frac{P \supset B}{3} = (P \supset B)$  ...

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$$

③ اذا كانه  $P(B) = \frac{1}{3}$  ،  $P(A) = \frac{12}{25}$  فانه  $P(A \cap B) = \dots$

$$\frac{17}{20} \quad \text{6} \quad \frac{50}{49} \quad \text{6} \quad \frac{1}{2} \quad \text{6} \quad \frac{2}{20}$$

④ اذا كان  $P$ ،  $b$  حدیث من فضائل العینة وكان  $P \supset b$  فإنه  $L(P/b) = \dots$

ل (م) ، ل (ب) ، ل (م-ب) ، ل (ف)

⑤ اذا كان  $p$ ،  $q$  جديدين متنافيين وكان  $L(p) = 3$ ،  $L(q) = 6$ ،

خاصه  $L(P \cup Q) = \dots$

1956 1966 1976 1986 1996 2006 2016 2026

⑦ اذا كانه  $P$ ،  $P$  حقيقيين متقلبين وكانه  $L(P) = 0.5$  ،  $L(P \cap Q) = 0.45$  ،

خاie ل (پ') = ....

٩، ٨، ٧، ٦، ٥، ٤، ٣، ٢، ١، ٠

⑦ اذا كانت معادله اخذار هي  $ص = آ.و.س + ٣$  وكانت قيمة

من الجدولية عند  $n = 6$  هي ٦ و ٤ فإنه مقدار الخطأ في صفحة من ...

•, 1 6      •, 2 6      •, 7 6      •, 8 6

مع حيااتي لكم بالتوفيق والنجاح الدائم



١٣) إذا كان  $s$  متغيراً عشوائياً متصلًا وكانت :

$$d(s) = \left\{ \frac{s-1}{8}, 1 \geq s \geq 5 \right\}, \text{ صفر } , \text{ فيما عدا ذلك}$$

أثبت أن  $d(s)$  دالة كثافة احتمالية ثم احسب  $P(2 < s < 3)$  ؟

١٤) إذا كان  $s$  متغيراً عشوائياً متصلًا وكانت :

$$d(s) = \left\{ \frac{1}{12}(s+2), 0 \leq s \leq 4 \right\}, \text{ صفر } , \text{ فيما عدا ذلك}$$

أحسب  $P(s > 2)$  ثم إذا كان  $L = (s > 2) = \frac{1}{2}$  فما قيمة  $L$  ؟

٣) إذا كان  $L = (P/B) = \frac{1}{3}$  ،  $L = (B) = \frac{12}{25}$

فأيه  $L = (A \cap B) = \dots$

$$\frac{4}{25}, \frac{1}{2}, \frac{2}{25}, \frac{17}{25}$$

١٥) اختر:

١) إذا كانت  $d(s) = \left\{ \begin{matrix} s, 0 \leq s \leq 4 \\ \text{صفر} , \text{ فيما عدا ذلك} \end{matrix} \right\}$

دالة كثافة لمتغير عشوائي متصل

فأيه  $L = \dots$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}$$

٤) إذا كانت معادله خط الاختدار :

$$ص = 7 + 2.5 ح$$

ص المتوقعة عند  $س = 10$  هي ....

$$3.5, 8.5, 20.5, 62.5$$

٢) إذا كانت

$$d(s) = \left\{ \frac{1}{25}(17-s), 1 \geq s \geq 2 \right\}, \text{ صفر } , \text{ فيما عدا ذلك}$$

فإن  $L = P(2 < s < 5) = \dots$

$$\frac{7}{25}, \frac{11}{25}, 7, 1$$

٥) إنا وقعت النقطة  $(5, 13)$  ،  $(14, 6)$

على خط الاختدار  $ص$  على  $س$  فأيه الإرباط

بين  $س$  ،  $ص$

طردياً ، عكسياً ، تلاماً ، منعدياً